Exponentielle d'une matrice :

(S) : $x'(t) = Ax(t) + b(t)$

(H) : $x'(t) = A \cdot x(t)$; $A \in M_n(\mathbb{K})$

$n = 1$ $\quad x'(t) = ax(t)$

$x(t) = \lambda e^{at}$

pour $t = 0$; $\lambda = x(0)$ $\Rightarrow x(t) = x(0) e^{at}$

(H) : $x'(t) = Ax(t)$

$\Rightarrow x(t) = \underbrace{x(0)}_{v} \cdot e^{tA}$?

$x'(t) = Ax(t) \Rightarrow x''(t) = A \cdot x'(t) = A^2 x(t)$

$x^{(k)}(t) = A^k (x(t))$

DL au $v(0)$; à l'ordre n :

(F. Taylor)

on a : $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underbrace{\circ(x^n)}_{\varepsilon(x)}$

Série de Taylor : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \underbrace{x^{(n)}(0)}_{A^n \cdot x(0)}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot \underbrace{x(0)}_{v}$

$A \in M_n(\mathbb{K})$

Déf : $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

Exemple : si A est nilpotente d'ordre 3 : $A^n = 0$; $\forall n \geq 3$

$\Rightarrow e^A = \sum_{n=0}^{2} \frac{A^n}{n!} = I + A + \frac{A^2}{2}$

$\Rightarrow e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$

$\frac{d e^{tA}}{dt} = A \cdot e^{tA}$

(S) : $x'(t) = Ax(t)$

(S') : admet une unique solution : $\varphi(t) = e^{tA} v$

avec $v = \varphi(0)$

corollaire : $\frac{du(t)}{dt} = A\,u(t)$ avec $u(0) = Id$

$\Rightarrow u(t) = e^{tA}\,u(0)$

$\Rightarrow u(t) = e^{tA}$

* si A diagonale : $A = \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{pmatrix}$ $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{R}$

$e^A = \begin{pmatrix} e^{h_1} & & 0 \\ & e^{h_2} & \\ 0 & & e^{h_n} \end{pmatrix}$ si A diagonalisable

$D = P^{-1} A P$ avec D diagonale

$A = P D P^{-1}$

$D = \begin{pmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{pmatrix}$; $h_1, \dots, h_n$ sont les vp de A

$P = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ | & & | \\ | & & | \end{pmatrix}$ vecteurs propres associés

$e^A = P e^D P^{-1}$

avec $e^D = \begin{pmatrix} e^{h_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{h_n} \end{pmatrix}$

$e^{tA} = e^{PtDP^{-1}} = P e^{tD} P^{-1}$ avec $e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{h_1 t} & & 0 \\ & e^{h_2 t} & \\ 0 & & e^{h_n t} \end{pmatrix}$

Cas général :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque

la décomposition de D

$A = D + N$ avec D est diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et N une matrice nilpotente d'ordre $p+1$; $N^{p+1} = 0$

Lemme :

a°) Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les vp de A

alors : $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ sont les vps de e^A

b) $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$

c) Si $AB = BA$; on a $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

d) en particulier e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

$$e^{-A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-A)^k}{k!}$$

e) e^{tA} est inversible et $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$

Suite cas général :

$e^A = e^{P+N} = e^P \cdot e^N$

avec :

$$e^P = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

et $e^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{N^n}{n!} = \sum_{n=0}^{p} \frac{N^n}{n!}$

$$= I + N + \frac{N^2}{2} + \dots + \frac{N^p}{p!}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \text{ calculer } e^A$$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda)+1) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(6-2\lambda-3\lambda+\lambda^2+1)+1=0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+7)+1=0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 7 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 1 = 0$

$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0$

pour $\lambda = 2$; $-8 + 24 - 24 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 2)(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases}$ par identification

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda = 2$; une VP d'ordre 2 multiple entre 3

La décomposition de Dunford de A

$A = D + N$

avec : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

et $N = A - D$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad N \text{ est un polynôme d'ordre 3.}$$
$$N^k = 0 \quad ; \quad \forall k \geq 3$$

$$e^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N \\ \cdot \end{pmatrix} + \frac{N^2}{2}$$

$$e^A = e^{D+N} = e^D e^N = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \left(I + N + \frac{N^2}{2} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e^A = \begin{pmatrix} \frac{e^2}{2} & \frac{e^2}{2} & -\frac{e^2}{2} \\ e^2/2 & e^2/2 & -3e^2/2 \\ -e^2 & e^2 & 2e^2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = e^{tA} \varphi(0)$$

$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille.

* Exemple : Résoudre le système suivant :

$$\text{(S)} \begin{cases} x'(t) = x(t) - 3z(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) - 6z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 2y(t) + 5z(t) \end{cases}$$

avec $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{cases}$

on pose $x(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix}$; $x'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

$(S)(t) \Rightarrow x'(t) = A x(t)$ donc $x(t) = e^{tA} \cdot x(0)$

$x(0) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$e^{tA} = ?$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 1 & -1-\lambda & -6 \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(5-\lambda)+12\right] - 3(2-1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\left[-5+\lambda-5\lambda+\lambda^2+12\right] - 3 + 3\lambda = 0$$

$\lambda^2 - 4\lambda + 7$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 7 - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 7\lambda - 3 + 3\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

pour $\lambda = 1$

$$-1 + 5 - 8 + 4 = 0$$

$\Leftrightarrow (\lambda-1)(a\lambda^2+b\lambda+c)=0$

par identification : $\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=-4 \\ c=4 \end{array}\right\}$ $\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$

$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)^2$

$\Rightarrow \lambda_1=1$ $\Rightarrow$ v.p simple de A et $\lambda_2=2$ vp double de A

La décomposition de A

$A = D+N$

avec $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N=A-D$

$$N=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Exp 2

$P^{-1}AP = D+N$

$P=\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$ $u_1, \dots, u_3$ sont les vecteurs propres associés à (λ_1, λ_2)

$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow N$ est nilpotente d'ordre 2 : $N^k = 0 \; ; \; \forall k \geq 2$

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{tN}{k!}\right)^k = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3t & 3t \\ 0 & -3t & 3t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3t & 3t \\ 0 & -3t & 1+3t \end{pmatrix}$$

Donc : $e^{tA} = e^{t(D+N)} = e^{tD} \cdot e^{tN} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3t & 3t \\ 0 & -3t & 1+3t \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & (1-3t)e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & -3te^{2t} & (1+3t)e^{2t} \end{pmatrix}$$

$B = P^{-1}AP$

$A = PBP^{-1}$

$e^{tA} = e^{PtBP^{-1}} = Pe^{tB}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & (1-3t)e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & -3te^{2t} & (1+3t)e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -3 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$e^{tA} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

$x(t) = e^{tA} \cdot x(0)$

$$x(t) = \begin{cases} x(t) = (-3t+3)e^{2t} - 2e^t \\ y(t) = (-3t+2)e^{2t} - e^t \\ z(t) = te^{2t} \end{cases}$$

$x(0) = 1$

$y(0) = 1$

$z(0) = 0$

(H) : $x'(t) = A\,x(t)$

(S) : $x'(t) = A\,x(t) + b(t)$

$x(t) : z(t) + x_0(t)$

avec $z(t)$ solution de (H)

et $x_0(t)$ solution particulière de (S)

$\rightsquigarrow x_0(t) = x_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-sA}\, b(s)\,ds$

avec $x_0(t_0) = e^{t_0 A} \cdot x(t_0)$

Formule de Duhamel

$(S) = x'(t) = A\,x(t) + b(t) \quad t \in \mathbb{R}$

(S) admet une unique solution

si $x(t)$ est solution de (S) alors : $x(t) = e^{(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t_s)A}\, b(s)\,ds$

$x'(t) = A\,x(t)$

$\rightsquigarrow a\,y''(t) + b\,y'(t) + c\,y(t) = 1(t)$

$\rightsquigarrow x(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow x'(t) = A\,x(t)$

$x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t)$

$\rightsquigarrow x'(t) = \underbrace{A\,x(t)}_{\in M_n(\mathbb{R})}$

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \| (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \|.$$

Chapitre 3 :

f est continue en (x_0,y_0)

ssi $\lim f(x,y) - f(x_0,y_0) = 0$

$d((x,y),(x_0,y_0)) \to 0$

Exple :

$f(x,y) = x^4 + y^4$

continuité en $(0,0)$: $\lim$ $f(x,y) - f(0,0) =$

$d((x,y),(0,0)) \to 0$

$\lim x^4 + y^4 = 0 + 0 = 0.$

$\lim \sqrt{x^2+y^2} \to 0$

$x \to 0$

$y \to 0$

$\Rightarrow f$ est continue en $(0,0)$.

Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f_1(x) = f(x,y_0)$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \mapsto f_2(y) = f(x_0,y).$

Si f est continue en (x_0,y_0) alors f_1 est continue en x_0 et f_2 est continue en y_0.

✱

Exercice : $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$(x_0,y_0) = (0,0)$

on pose : $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f_1(x) = f(x,0) = 0 = f_1(0)$.

f_1 est continue en 0.

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \mapsto f_2(y) = f(0,y) = 0 = f_2(0) \Rightarrow f_2$ est continue en 0.

On a : $\lim_{d((x,y),(0,0)) \to 0} f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{0} = \lim_{\substack{\sqrt{x^2+y^2} \\ x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

on pose :

$x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$y_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

$\lim_{\sqrt{x_n^2+y_n^2} \to 0} f(x_n,y_n) = \lim_{\substack{\sqrt{x_n^2+y_n^2} \\ n \to +\infty}} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$.

$n \to +\infty$

$\Rightarrow f$ n'est pas continue en $(0,0)$

soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$

Continuité de f en $(0,0)$:

on a : $f(x,0) = 1$ et $f(0,y) = -1$ $\Rightarrow \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \to 0} f(x,y) - f(0,0)$ n'existe pas

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0,y_0) \in \Omega$; $u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$

La dérivée directionnelle de f en (x_0,y_0) :

$\partial_u f(x_0,y_0) = f'_u(0)$

avec

$f_u(\Delta) = f((x_0,y_0) + \Delta u)$

si $u = (0,0) \Rightarrow \partial_{u=(0,0)} f(x_0,y_0) = 0$.

on a : $\partial_x f(x_0,y_0) = \partial_{\underbrace{(1,0)}_{e_1}} f(x_0,y_0)$

$\partial_y f(x_0,y_0) = \partial_{\underbrace{(1,0)}_{e_1}} f(x_0,y_0)$.

Proposition

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ alors f admet une dérivée directionnelle dans toute direction u et on a :

$$\partial_u f(x,y) = u_1 (\partial_x f)(x,y) + u_2 (\partial_y f)(x,y).$$

Exple :

$$f(x,y) = x^2 e^{xy} \quad ; \quad u = (1, -2)$$

Calculer $\partial_u f(x,y)$.

on a $\partial_x f(x,y) = 2x e^{xy} + x^2 y e^{xy}$

$$= (2x + x^2 y) e^{xy}$$

$$\partial_y f(x,y) = x^3 . e^{xy}$$

$$\Rightarrow \partial_u f(x,y) = 1 \times (2x + x^2 y) e^{xy} + (-1) \times (x^3 e^{xy})$$

$$= (2x + x^2 y - x^3) e^{xy}.$$

$$(Df)_{(x,y)}(u) = (\partial_u f)(x,y).$$

$$= u_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)(x,y) + u_2 \left(\frac{\partial}{\partial y} f\right)(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = Df_{(x,y)}(e_1).$$

et $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = Df_{(x,y)}(e_2)$.

$$Df(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right).$$

Application de classe $\mathcal{C}^k$.

si: f est de classe $\mathcal{C}^2$

alors: $\frac{\partial^2}{\partial x y} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y x} f(x,y)$.

Les équations de transport:

u: concentration → inconnue.

$\partial_t u(t,x) + c \partial_x u(t,x) = 0$. eq de transport.

$Q(t) = \int_0^a u(t,y)\, dy$. : La quantité de polluant

$Q(t+h) = \int_{ch}^{x+ch} u(t,y)\, dy$

on pose $y' = y - ch$

→

$$Q(t) = \int_0^x u(t,y')\, dy'.$$

5

2/ $\Rightarrow v(t,x) = u(t+ch,\ x+ch)$.

Lemme 3.2.1

$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1

$f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \mapsto F(t) = u(f_1(t), f_2(t))$

est dérivable et $F'(t)$

$F'(t) = f_1'(t) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(f_1(t), f_2(t)) + f_2'(t) \cdot \frac{\partial y}{\partial y}(f_1(t), f_2(t))$.

Exple, $u(x,y) = x^2 + 2xy\cos(3y)$

$f_1(t) = 2t \to f_1'(t) = 2$

$f_2(t) = 1-t \to f_2'(t) = -1$

Soit $F(t) = u(f_1(t), f_2(t))$

Calculer $F'(t)$.

on $F'(t) = f_1'(t) \cdot \partial_x u(f_1(t) + f_2(t)) +$
$f_2'(t) \cdot \partial_y u(f_1(t), f_2(t))$

$\begin{cases} \to f_1'(t) = 2 \\ \to f_2'(t) = -1 \end{cases}$ | $\partial_x N(x,y) = 2x + 2y\cos(3y)$.

